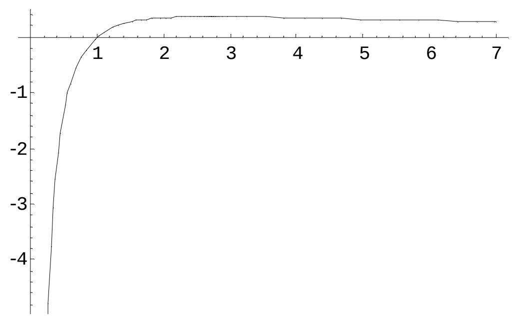
Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 4 de 1999.

Sea f : (0, +∞) → R la función logaritmo neperiano f(x) = Ln(x).
(a) [1 punto] Prueba que la función derivada f ' es decreciente en todo su dominio.
(b) [1'5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función g : (0, +∞) → R dada por g(x) = f(x)/x.

Solución

(a)
f(x) = Ln(x).
f '(x) = 1 / x
Para que f '(x) sea decreciente su derivada f ''(x) tiene que ser < 0, en todo su dominio, pero
f ''(x) = $-1 / x^2$, la cual siempre es negativa.
(b)
g(x) = f(x) / x = ln(x) / x.
Estudiamos su primera derivada
g '(x) = [(1 – ln(x)) / x^2].
g '(x) = 0, nos dá 1 – ln(x) = 0, de donde ln(x) = 1, es decir x = e.
Como g'(x) > 0 si 0 < x < e, la función g(x) es creciente en 0 < x < e
Como g'(x) < 0 si x > e, la función g(x) es decreciente en x > e
Por definición en x = e hay un máximo relativo que vale g(e) = 1/e
Su gráfica es

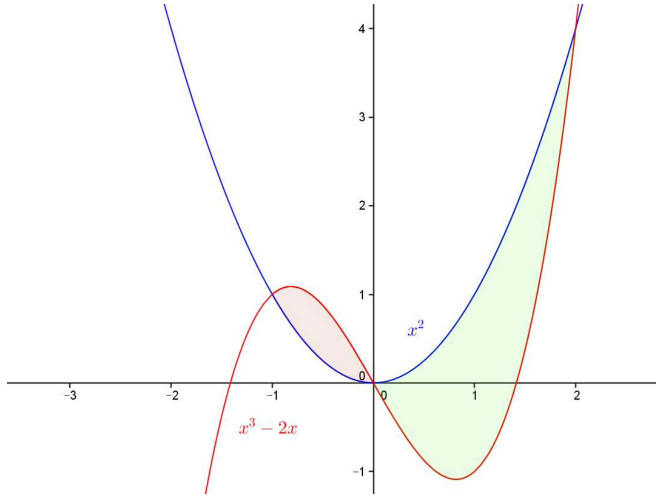


Ejercicio 2 de la opción A del modelo 4 de 1999.

[2'5 puntos] Dibuja y calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones f , g : R → R dadas por f(x) = x^2 y g(x) = $x^3 - 2x$

Solución

f(x) = x^2 es una parábola
g(x) = $x^3 - 2x$, es una cúbica que corta a los ejes en (0,0), (+ $\sqrt{2}$, 0), (- $\sqrt{2}$, 0)
$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$
Estudiamos g '(x) = $3x^2 - 2$.
g '(x) = $3x^2 - 2 = 0$ nos da x = $\pm\sqrt{2/3}$
Como g '(x) > 0 si x < $-\sqrt{2/3}$, g(x) es creciente en x < $-\sqrt{2/3}$,
Como g '(x) < 0 si $-\sqrt{2/3}$ < x < $+\sqrt{2/3}$, g(x) es decreciente en $-\sqrt{2/3}$ < x < $+\sqrt{2/3}$,
Como g '(x) > 0 si x < $+\sqrt{2/3}$, g(x) es creciente en x < $+\sqrt{2/3}$,
Por definición en x = $-\sqrt{2/3}$, hay un máximo relativo y en x = $+\sqrt{2/3}$ hay un mínimo relativo
Estudiamos g ''(x) = 6x
g ''(x) = 0, para x = 0
Como g ''(x) < 0 si x < 0, g(x) es cóncava(en Andalucía) si x < 0
Como g ''(x) > 0 si x < 0, g(x) es convexa(en Andalucía) si x > 0
La gráfica de las dos funciones es



Para determinar el área encerrada por las dos funciones tenemos que calcular los puntos donde coinciden, es decir las soluciones de f(x) = g(x)

$x^3 - 2x = x^2$, de donde $x(x^2-x-2) = 0$. Y las soluciones son x = -1, x = 0 y x = 2, por tanto

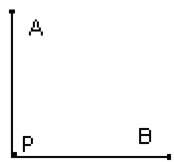
$$\text{Area}=\int_{-1}^{0}\left[(x^3-2x)-x^2\right]dx+\int_{0}^{2}\left[x^2-(x^3-2x)\right]dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{2}=$$

$= [\,(0) - (1/4 + 1/3 - 1)\,] + [\,(-2^4/4 + 2^3/3 + 2^2) - (0)\,] = 37/12$ u. a.

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 4 de 1999.

[2'5 puntos] Determina y representa el lugar geométrico formado por los puntos P = (x, y) del plano que verifican la siguiente propiedad: El triángulo PAB cuyos vértices son P, A = (2, 0) y B = (-2, 0) es un triángulo rectángulo con ángulo recto en P.

Solución



Si el triángulo APB es rectángulo en P los vectores **PA** y **PB** son perpendiculares, por tanto su producto escalar es cero

PA = (2-x, -y)

PB = (-2-x, -y)

PA • PB = (2-x, -y) •(-2-x, -y) = $x^2 - 4 + y^2 = 0$, es decir nos sale la circunferencia de centro (0,0) y radio 2

$x^2 + y^2 = 2^2$

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 4 de 1999.

La matriz cuadrada X de orden 3 verifica la relación $X^3+X=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Determina si es posible el rango de X.

(b) [1'5 puntos] ¿Verifica alguna de las matrices A y B siguientes la relación del enunciado:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

(a)

$0 \neq \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2^3 = 8 = |X^3 + X| = |X(X^2 + I)| = |X|\,|(X^2 + I)| \neq 0$, ninguno de los dos números $|X|$, y $|(X^2 + I)|$ son cero, luego $|X| \neq 0$, y por tanto rango(X) = 3.

(b)

Como $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$, la matriz A no puede verificar la relación.

Como $|B|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$, la matriz B puede verificar la relación. Veámoslo

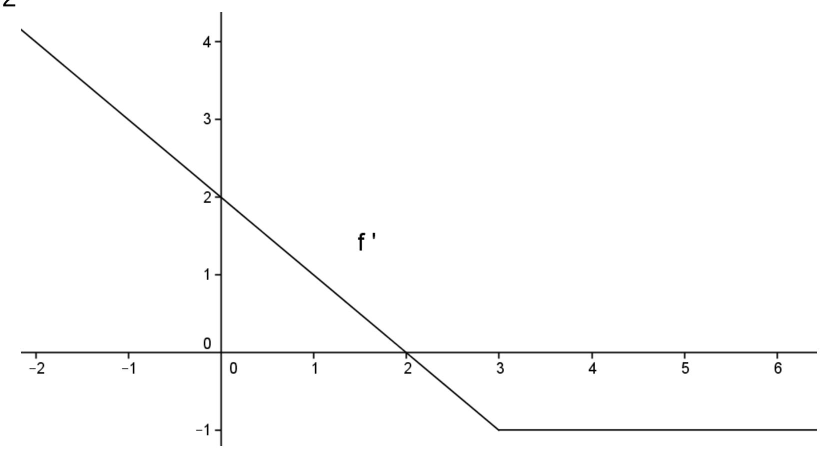
$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B^3=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\quad B^3+B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto la matriz B si verifica la relación

Opción A

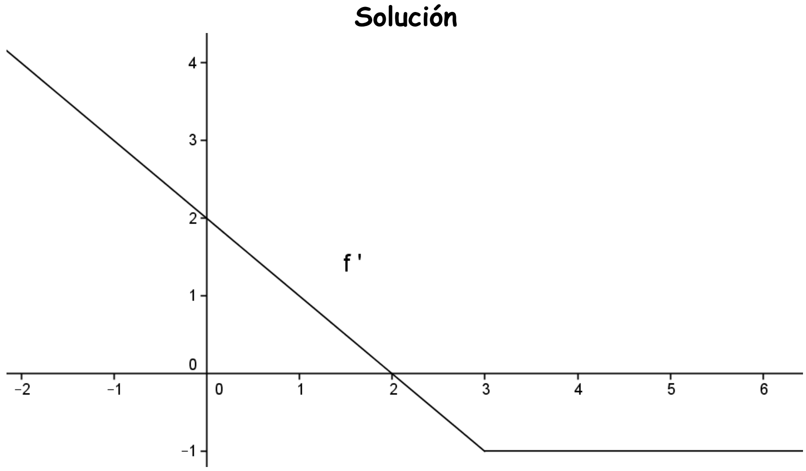
Ejercicio 1 de la opción B del modelo 4 de 1999.

La función derivada de una función derivable $f : \Re \to \Re$ viene dada por la gráfica de la figura. Además, se sabe que f(-1) = 9/2



(a) [2 puntos] Determina una expresión algebraica de f.

Solución



De la gráfica observamos que f '(x) está formada por dos trozos de recta, que pasa por (0,2) y (2,0) y claramente se ve que es la constante y = -1 para $x \geq 3$

La ecuación de una recta es y = mx + n

Como pasa por (0,2), tenemos 2 = n

Como pasa por (2,0), tenemos 0 = 2m + 2, de donde m = -1. Luego

$$f'(x)=\begin{cases} -x+2 & \text{si } x<3 \\ -1 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$$

Aplicando el teorema fundamental del calculo integral a cada rama tenemos

Si x < 3, $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (-x+2)\,dx = -x^2/2 + 2x + K$. Como el problema dice que f(-1) = 9/2, tenemos que $9/2 = -1/2 - 2 + K$, de donde K = 7

Análogamente, si $x > 3$, $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (-1)\,dx = -x + K$. Como coinciden en $x = 3$, por ser continua tenemos que

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$, es decir

$-9/2 + 6 + 7 = -3 + K$, de donde $K = 23/2$, y la función pedida es $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}+2x+7 & \text{si } x<3 \\ -x+23/2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 4 de 1999.

[2'5 puntos] Calcula una primitiva de la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = 2x^2 \cdot \mathrm{sen}(x)$ cuya gráfica pase por el origen de coordenadas

Solución

$F(x) = \int f(x)\,dx = \int 2x^2 \mathrm{sen}(x)\,dx$ = *por partes* = I

$x^2 = u$; $2x\,dx = du$

$dv = \mathrm{sen}(x)\,dx$; $v = \int \mathrm{sen}(x)\,dx = -\cos(x)$

$F(x) = I = 2.[\, x^2.(-\cos(x)) + \int 2x\cos(x)\,dx\,] = 2.[\, x^2.(-\cos(x)) + 2\int x\cos(x)\,dx\,] =$

$= 2.[\, x^2.(-\cos(x)) + 2.I_1\,]$

$I_1 = \int x\cos(x)\,dx = x.\mathrm{sen}(x) - \int \mathrm{sen}(x) = x.\mathrm{sen}(x) + \cos(x)$

Habiendo tomado $u = x$ y $dv = \cos(x)dx$. Luego

$F(x) = 2.[\, x^2.(-\cos(x)) + 2.I_1\,] = 2.[\, x^2.(-\cos(x)) + 2.(\, x.\mathrm{sen}(x) + \cos(x)\,)\,] =$

$= -2x^2.\mathrm{cox}(x) + 4x.\mathrm{sen}(x) + 4\cos(x) + K$

Como $F(0) = 0$, tenemos $0 = 0+0+4.1 + K$, de donde $K = -4$, y la primitiva pedida es

$F(x) = -2x^2.\mathrm{cox}(x) + 4x.\mathrm{sen}(x) + 4\cos(x) - 4$

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 4 de 1999.

Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y \quad &= 1 \\ m y + z &= 0 \\ x + (1+m)y + mz &= 1+m \end{aligned}$$

(a) [1'5 puntos] Estudia su comportamiento según los valores del parámetro m.

(b) [2'5 puntos] Resuélvelo para m = 2.

Solución

(a)

$$\begin{aligned} x + y \quad &= 1 \\ m y + z &= 0 \\ x + (1+m)y + mz &= 1+m \end{aligned}$$

Su matriz de los coeficientes A y su matriz ampliada A* son

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{pmatrix}, \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & m & 1+m \end{pmatrix}$$

si $|A| \neq 0$, el sistema tiene solución única

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m & m \end{vmatrix}=1(m^2-1-m)-1(-1)=m^2-m=m.(m-1)$$

$|A| = 0$, si y solo si $m = 0$ o $m = 1$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, el sistema tiene solución única.

Si m = 0

$$\begin{aligned} x + y \quad &= 1 \\ + z &= 0 \\ x + (1)y + \quad &= 1 \end{aligned}$$

Tomando $y = \lambda$, nos queda $x = 1 - \lambda$, luego la solución es $(x,y,z) = (1-\lambda, \lambda, 0)$ con $\lambda \in \Re$

Si m = 1

$$\begin{aligned} x + y \quad &= 1 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

$$x + (2)y + z = 2$$

restándole a la tercera la primera obtenemos y + z = 1, que junto a la segunda y + z = 0 me hacen un sistema incompatible

(b)

Si m = 2

$$\begin{aligned} x + y \quad\quad &= 1 \\ 2y + z &= 0 \\ x + (3)y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

Resolviéndolo obtenemos x = 2, y = -1 y z = 2.

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 4 de 1999.

(a) [2 puntos] ¿Cuál es el punto P de la recta r dada por $r \equiv \begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-2y-4z=1 \end{cases}$, que está mas cerca del punto A =(2,3,-1).

(b) [0'5 puntos] Halla el área del triángulo cuyos vértices son A, P y B = (1, 0, 0)

Solución

(a)

El punto P de la recta r que está mas cerca del punto A es el que está en la proyección ortogonal, para lo cual calculamos el plano Π perpendicular a r por el punto A, y hallamos la intersección de dicho plano con la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-2y-4z=1 \end{cases}$

Tomando z = λ

Nos queda la recta

$x + y = 1 - 2\lambda$

$x - 2y = 1 + 4\lambda$

resolviéndolo obtenemos x = 1, e y = -2λ, por tanto la recta r en vectorial es

$r \equiv (x,y,z) = (1, -2\lambda, \lambda)$. Luego un vector director de r es **v** = (0,-2,1)

El plano Π pasa por el punto A(2,3,-1) y tiene como vector normal **n** = **v** = (0,-2,1), el director de la recta, luego

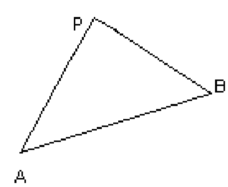
$\Pi \equiv 0(x-2) - 2(y-3) + 1(z+1) = 0$, de donde $-2y + z + 7 = 0$

El punto P = r $\cap$ Π es

$-2(-2\lambda) + \lambda + 7 = 0$, de donde $\lambda = -5/7$ y el punto es P(1, -2(-7/5), -7/5) = P(1, 14/5, -7/5)

(b)

A(2,3,-1), B(1,0,0) , P(1, 14/5, -7/5)



El área pedida es ½ |**BPxBA**|

BP = (0, 14/5, -7/5)

BA = (1,3,-1)

$$\text{BPxBA} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 14/5 & -7/5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-14/5 + 21/5) - \mathbf{j}(7/5) + \mathbf{k}(-14/5) = (7/5, -7/5, -14/5)$$

Área = ½ |**BPxBA**| = ½.(49/25 + 49/25 + 196/25)$^{(1/2)}$ = $\sqrt{294/25}$ u. a.